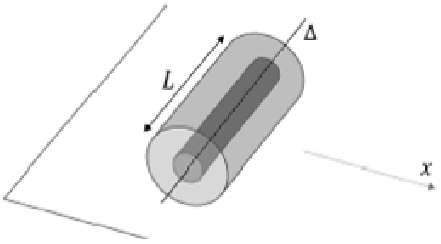
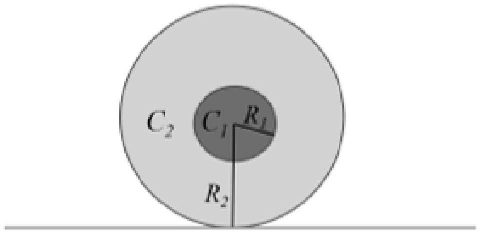
Série 14

Exercice S14E1**$^{(*)}$ (50 min) : Rouleau (Examen 2023)

Soit un rouleau de largeur L constitué d'un cylindre creux C_2 de rayon extérieur R_2, de rayon intérieur R_1, et de masse volumique ρ_2. Le cœur de ce cylindre est un cylindre plein C_1 de rayon R_1 et de masse volumique ρ_1. Les deux solides qui constituent le rouleau partagent le même axe Δ de révolution qui passe par le centre de masse du rouleau.

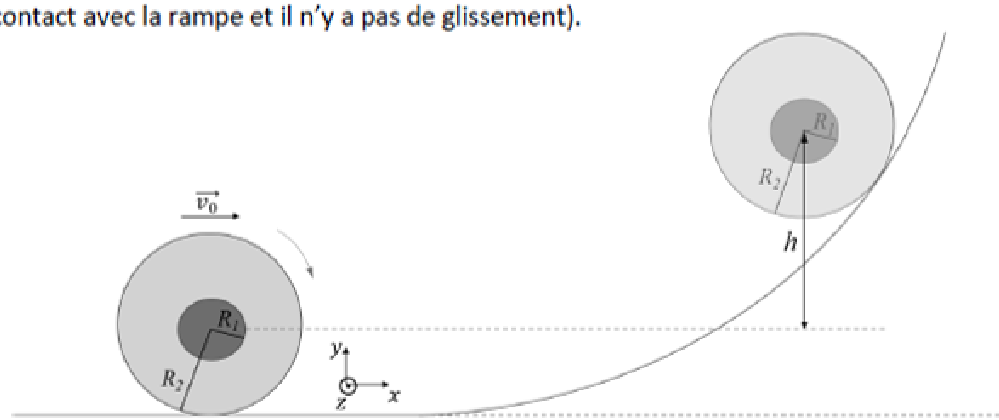




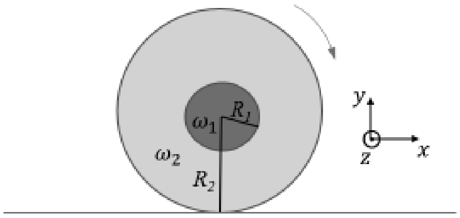
1a Calculez le moment d'inertie I du rouleau pour une rotation autour de l'axe Δ. I sera exprimé en fonction de R_1, R_2, ρ_1, ρ_2, et L. On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R et de masse M pour une rotation autour de l'axe Δ est $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

Dans la suite, le moment d'inertie I du rouleau devient une donnée du problème. La masse totale du rouleau est M.

1b Le rouleau roule sans glissement sur un plan horizontal et son centre de masse se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$. Il n'y a pas de frottement fluide de l'air sur le rouleau. Le rouleau aborde une rampe incurvée (voir schéma ci-dessous) avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$. Exprimez la hauteur maximum h que le centre de masse du rouleau atteint (le rouleau reste toujours en contact avec la rampe et il n'y a pas de glissement).



Le cylindre C_1, de moment d'inertie I_1 pour une rotation autour de l'axe Δ, peut maintenant tourner à l'intérieur du cylindre C_2, de moment d'inertie I_2 pour une rotation autour de l'axe Δ. On pose ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires de C_1 et C_2, respectivement. À $t = 0$, la vitesse de rotation du cylindre C_1 est $\overrightarrow{\omega_1} = -\Omega_1\overrightarrow{e_z}$, celle du cylindre C_2 est $\overrightarrow{\omega_2} = \vec{0}$, et la vitesse du centre de masse du rouleau est nulle. À $t > 0$, un système permet de générer des frottements entre les deux cylindres. Ces frottements créent un moment de force de norme constante $\mathcal{M}_f$. En raison des frottements entre les deux cylindres, ω_1 diminue alors que ω_2 augmente pour $t > 0$, et le rouleau se met à rouler sans glissement suivant $\overrightarrow{e_x}$ (voir schéma ci-dessous).



1c Ecrivez pour $t > 0$ la 2[nde] loi de Newton (vectoriellement) appliquée au centre de masse du rouleau. Quelles sont les composantes de l'accélération suivant x, y, et z ?

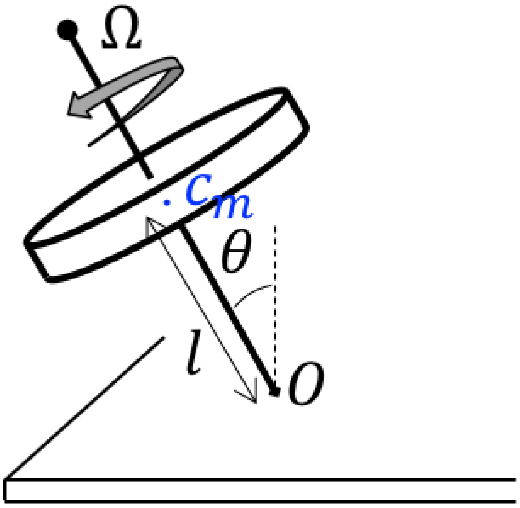
1d Calculez $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$.

1e Quelle est la condition entre $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ pour laquelle il n'y a plus de frottement entre les deux cylindres ?

1f Déterminez le temps t_f pour lequel la condition précédente est satisfaite.

1g À quelle vitesse v_f se déplace le centre de masse du rouleau pour $t \geq t_f$?

Exercice S14E2** (20 min) : Réaction du sol sur une toupie



Une toupie de masse m tourne sur le sol, à une vitesse angulaire Ω élevée. Son point de contact avec le sol O est fixe. L'axe de la toupie est animé d'un mouvement de précession, à la vitesse angulaire $\omega_p = \frac{mgl}{I\Omega}$ où l est la distance entre O est le centre de masse c_m de la toupie et I son moment d'inertie autour de son axe. La toupie tourne dans le sens indiqué sur le schéma (les points de la toupie situés vers vous vont de haut en bas / de droite à gauche).

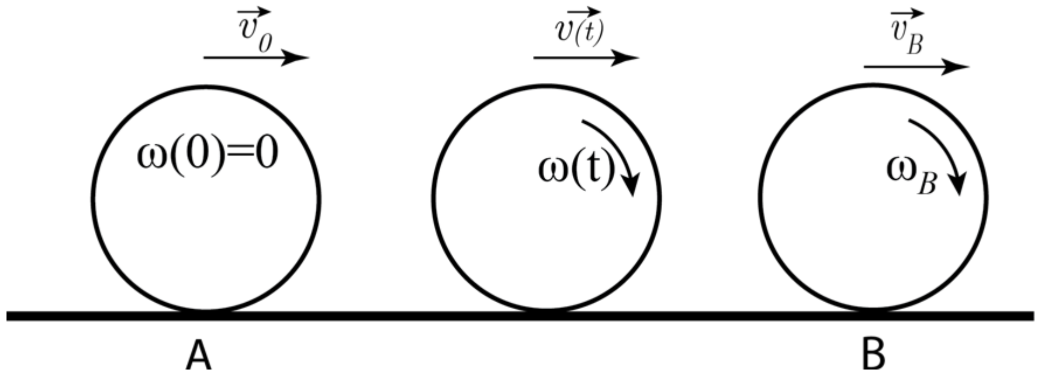
a) Quelles sont les forces appliquées à la toupie ?

b) Tracez le moment cinétique de la toupie sur le schéma.

c) Montrez dans quel sens a lieu le mouvement de précession.

d) Appliquez Newton au centre de masse et déduisez-en les composantes de la force de réaction du sol.

Exercice S14E3**(*) (55 min) : Bowling (Examen 2022)



On veut analyser le mouvement d'une boule de bowling de masse m, de rayon R et ayant un moment d'inertie I, avec $I = \frac{2}{5}mR^2 = \beta m R^2$.

La boule est initialement lancée sur la piste avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ sans rebond. Elle glisse sans frottement jusqu'au point A. A partir de A, elle continue à glisser mais avec un frottement avec la piste qui la met en rotation. On pose $t = 0$ en A. La boule arrive ensuite en B à un temps t_B où elle se met à rouler sans glissement avec une vitesse angulaire ω_B.

On suppose dans un premier temps que la boule est un point matériel qui glisse avec un frottement sec entre A et B. Le coefficient de frottement est μ_d.

a) Exprimez v_B en prenant soin de faire apparaître le temps t_B dans l'expression.

b) Calculez le travail de la force de frottement entre A et B.

On considère maintenant le cas réaliste de la phase de « glissement-roulement » entre A et B. La boule n'est plus considérée comme un point matériel.

c) Quelle est la relation entre v_B, vitesse du centre de masse de la boule, et $\omega_B = \omega(t_B)$ au point B ?

d) Déterminez l'expression de $\omega(t)$, avec comme condition initiale $\omega(0) = 0$ au point A.

e) Quel est le temps t_B au bout duquel la boule se met à rouler sans glissement ?

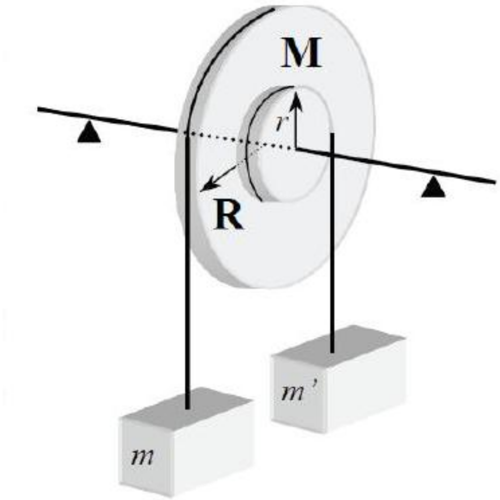
f) Déterminez la vitesse v_B en fonction de la vitesse initiale v_0 et du coefficient β.

g) Calculez l'énergie dissipée par la force de frottement entre A et B.

* * * * * * *

Exercices supplémentaires

Exercice S14ES1** (25 min) : Une poulie et deux masses (Examen 2011)

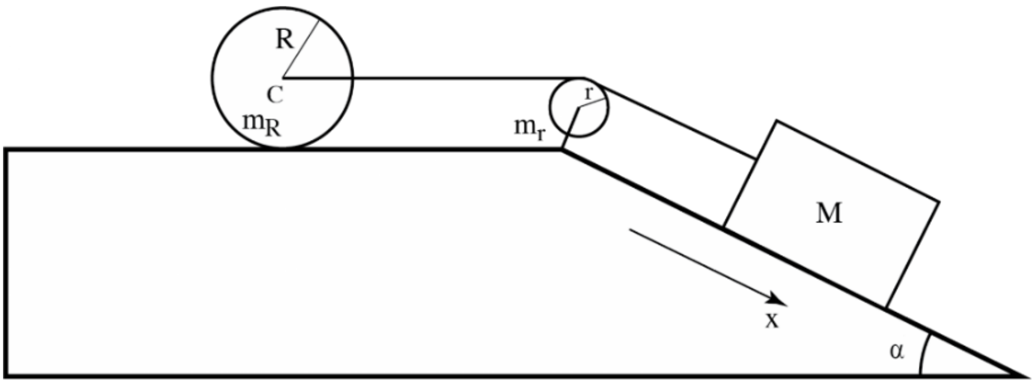


Considérons le système ci-contre. On suppose que la double poulie possède un moment d'inertie global I_Δ.

a) Déterminer la vitesse angulaire du disque et l'accélération des masses m et m'.

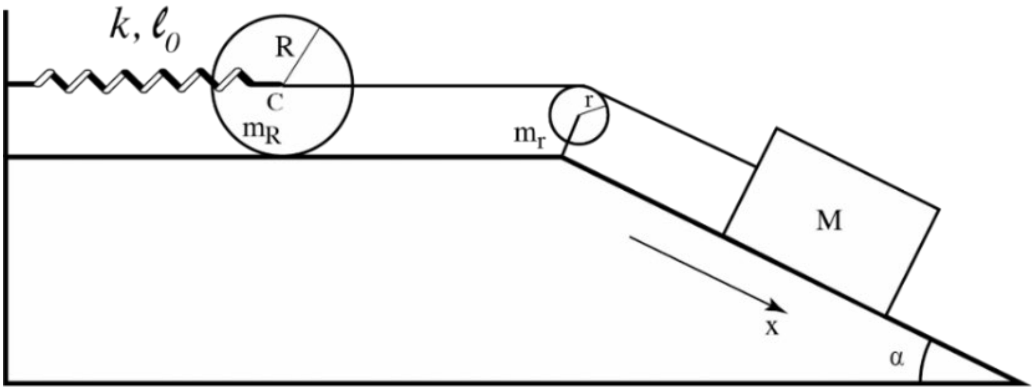
b) Calculer les tensions de chacune des cordes, en prenant comme valeurs numériques : $m = 0.6$ kg, $m' = 0.5$ kg, $M = 0.8$ kg, $R = 8$ cm, $r = 6$ cm et $I_\Delta = 2.10^{-3}$ kg.m^2.

Exercice S14ES2** (55 min) : Poulie et ressort (Examen 2021)



Soit un système mécanique (voir schéma ci-dessous) constitué d'une roue de masse m_R et de rayon R, d'une poulie de masse m_r et de rayon r, d'une masse M (considérée comme un objet ponctuel), et d'un fil inextensible qui relie la masse M à l'axe de rotation de la roue (C). La roue roule sans glissement et la masse M se déplace sur le plan incliné sans frottement. Le plan incliné forme un angle α avec l'horizontale. L'ensemble est soumis à la force de pesanteur. On note I_R et I_P les moments d'inertie respectivement de la roue et de la poulie, pour une rotation autour d'un axe passant par le centre de masse. On suppose que le fil est toujours tendu pendant le mouvement.

a) La masse M étant supérieure à la masse de la roue, elle se met à descendre le long du plan incliné. Exprimez l'accélération de la masse M suivant l'axe des x.



On ajoute un élément dans le système : un ressort de longueur au repos l_0 et de raideur k. Le ressort est fixé d'un côté à un support (A) et de l'autre côté à l'axe de la roue (C), comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

b) Le système est à l'équilibre avec le ressort en extension.
Calculez l'allongement $\Delta l = l - l_0$ du ressort.

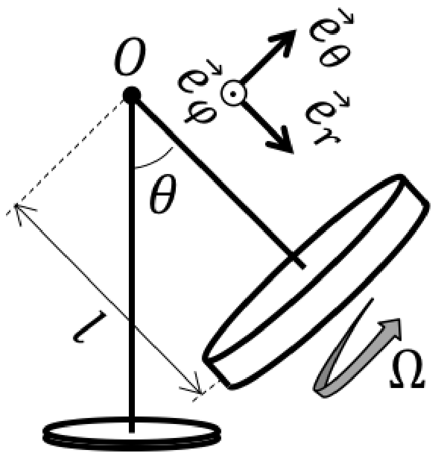
À partir de sa position d'équilibre, on déplace la masse M vers le bas et on la lâche sans vitesse.

c) Déterminez l'énergie mécanique totale du système en fonction de $\dot{x}, x$, et des données du problème. La position x est la position de la masse M définie par rapport à sa position d'équilibre.

d) Trouvez l'équation différentielle de mouvement de la masse M. Donnez l'expression de la pulsation ω_0 et de la période T_0.

e) On applique au point d'attache A du ressort sur le support un mouvement périodique tel que $x_A(t) = d\cos(\Omega t)$. Il n'y a aucun frottement entre la masse M et le plan incliné et les frottements fluides avec l'air sont négligeables. Tracez la courbe de l'amplitude A de l'oscillation de la masse M en fonction de Ω et donnez la valeur de la pulsation de résonance.

Exercice S14ES3** (35 min) : Toupie pendue



Une toupie, soumise au champ de la pesanteur g, est pendue par son axe de rotation sur un socle. Son point d'attache O est à une distance l de son centre de masse. La toupie est en rotation rapide autour de son axe à vitesse angulaire Ω constante. Le moment d'inertie de la toupie autour de son axe est noté I. Le sens de la rotation de la toupie est schématisé ci-contre (les points de la toupie proches de vous montent vers la droite).

On constate qu'au lieu de tomber en position verticale, la toupie reste en équilibre avec un angle θ constant, tout en tournant autour du socle avec une vitesse angulaire de précession ω_p.

a) Complétez le schéma en y représentant le moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie en O ainsi que son poids. Comment s'écrit $\vec{L}$ en fonction de Ω dans le système de coordonnées sphériques du schéma ?

b) Exprimez le moment du poids en O dans ce même système de coordonnées.

c) Déduisez-en une expression de la vitesse de précession ω_p. Précisez dans quel sens a lieu la précession : sur le schéma, la toupie s'approche-t-elle ou s'éloigne-t-elle de vous?

Aide/Rappel : dans le système de coordonnées sphériques :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \vec{e}_\varphi$$